

問D. 図 2-2 は、既知点 A、B と新点 S、T からなる水準路線において実施した、公共測量における 1 級水準測量を模式的に表したものである。表 2-5 はその観測結果である。表 2-6 は既知点間の検測結果と前回の観測高低差である。次の各問に答えよ。

なお、関数の値が必要な場合は、巻末の関数表を使用すること。

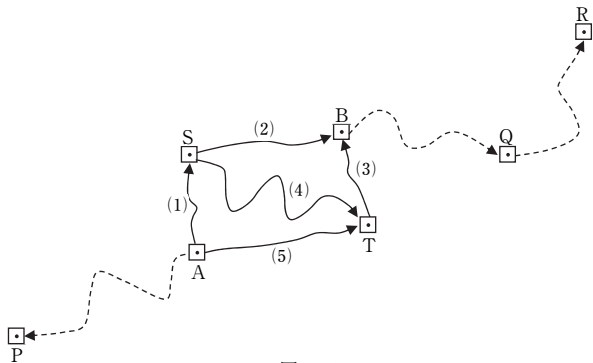


図 2-2

表 2-5

路線番号	路線方向	観測高低差 (m)	観測距離 (km)
(1)	A→S	+5.4029	1.00
(2)	S→B	+2.6027	2.00
(3)	T→B	+5.4012	1.00
(4)	S→T	-2.8022	4.00
(5)	A→T	+2.5983	2.00

表 2-6

路線方向	検測結果 (m)	前回の観測高低差 (m)	観測距離 (km)
A→P	+12.2472	+12.2466	4.00
B→Q	+4.2127	+4.2081	3.24
B→R	+9.0133	+9.0181	5.76

問D－1. 既知点A、Bについて、それぞれ隣接既知点P、Qとの間での検測を行った。その結果、A→P 間では許容範囲内であったものの、B→Q 間では許容範囲を超過した。そのため、更にBから既知点Rで検測を行ったところ、許容範囲内であった。

A→P 間、B→R 間で許容範囲内であること及びB→Q 間で許容範囲を超過していることを確かめるための計算過程を解答欄に記せ。

ただし、検測における結果と前回の観測高低差との較差の許容範囲は $2.5\text{mm}\sqrt{S}$ とし、 S は観測距離（片道、km 単位）とする。

問D－2. 路線A→S→T→Aと路線B→S→T→Bについて環閉合差を計算したところ、いずれも許容範囲内であった。

2つの路線の環閉合差がともに許容範囲内であることを確かめるための計算過程を解答欄に記せ。

ただし、環閉合差の許容範囲は $2\text{mm}\sqrt{S}$ とし、 S は観測距離（片道、km 単位）とする。

問D-3. 次の文は、新点S、Tの標高を決定するための計算過程を示したものである。

$\boxed{\text{ア}}$ ～ $\boxed{\text{コ}}$ に入る適当な数値を、 $\boxed{\text{ウ}}$ ～ $\boxed{\text{オ}}$ 及び $\boxed{\text{キ}}$ 、
 $\boxed{\text{ク}}$ については小数第2位まで求め、 $\boxed{\text{ア}}$ 、 $\boxed{\text{イ}}$ 、 $\boxed{\text{カ}}$ 、
 $\boxed{\text{コ}}$ については小数第4位まで求め、 $\boxed{\text{ケ}}$ については小数第5位を四捨五入し、小数第4位まで求め、解答欄に記せ。

路線 (i) ($i=1, 2, \dots, 5$) における観測高低差の残差を V_i 、点S、Tの仮定標高の補正量をそれぞれ X_S 、 X_T とする。また、点A、B、S、Tの仮定標高をそれぞれ 10.0000m、18.0000m、15.4000m、12.6000m とする。このとき、観測方程式は以下ようになる。

$$V_1 = X_S - \boxed{\text{ア}}$$

$$V_2 = -X_S - 0.0027$$

$$V_3 = -X_T - \boxed{\text{イ}}$$

$$V_4 = -X_S + X_T - (-0.0022)$$

$$V_5 = X_T - (-0.0017)$$

これらの式を行列で表記すると、

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \\ V_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \\ -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_S \\ X_T \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \boxed{\text{ア}} \\ 0.0027 \\ \boxed{\text{イ}} \\ -0.0022 \\ -0.0017 \end{bmatrix}$$

となる。ここで、

$$V =, \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \\ -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} X_S \\ X_T \end{bmatrix}, \quad L = \begin{bmatrix} \boxed{\text{ア}} \\ 0.0027 \\ \boxed{\text{イ}} \\ -0.0022 \\ -0.0017 \end{bmatrix}$$

と置くと、 $V = AX - L$ と書ける。また、重量の行列を P とすると、

$$P = \begin{bmatrix} 1.00 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{\text{ウ}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{\text{エ}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{\text{オ}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.50 \end{bmatrix}$$

となる。行列 A の転置行列を A^T と表すと、

$$A^T P = \begin{bmatrix} 1.00 & -0.50 & 0.00 & -0.25 & 0.00 \\ 0.00 & 0.00 & -1.00 & 0.25 & 0.50 \end{bmatrix}$$

となるので、

$$A^T P L = \begin{bmatrix} 0.0021 \\ \boxed{\text{カ}} \end{bmatrix}, \quad A^T P A = \begin{bmatrix} \boxed{\text{キ}} & -0.25 \\ -0.25 & \boxed{\text{ク}} \end{bmatrix}$$

となる。 $A^T P A$ の逆行列は、

$$(A^T P A)^{-1} = \frac{1}{3.00} \begin{bmatrix} \boxed{\text{ク}} & 0.25 \\ 0.25 & \boxed{\text{キ}} \end{bmatrix}$$

であるので、

$$\begin{aligned} X &= (A^T P A)^{-1} (A^T P L) = \frac{1}{3.00} \begin{bmatrix} \boxed{\text{ク}} & 0.25 \\ 0.25 & \boxed{\text{キ}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.0021 \\ \boxed{\text{カ}} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \boxed{\text{ケ}} \\ -0.0013 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

が得られる。以上より、新点 S、T の標高はそれぞれ、

$$15.4000 + X_S = \boxed{\text{コ}} m$$

$$12.6000 + X_T = 12.5987 m$$

と求まる。

問D

問D-1

A→P 間、B→Q 間、B→R 間の観測高低差の較差は
 $12.2472\text{m} - 12.2466\text{m} = 0.6\text{mm}$
 $4.2127\text{m} - 4.2081\text{m} = 4.6\text{mm}$
 $9.0133\text{m} - 9.0181\text{m} = -4.8\text{mm}$
 となる。

較差の許容範囲を計算し、較差と比較すると、
 $2.5\text{mm} \times \sqrt{4.00} = 2.5 \times 2.0 = 5.0 > 0.6\text{mm}$
 $2.5\text{mm} \times \sqrt{3.24} = 2.5 \times 1.8 = 4.5 < 4.6\text{mm}$
 $2.5\text{mm} \times \sqrt{5.76} = 2.5 \times 2.4 = 6.0 > 4.8\text{mm}$
 となる。

以上より、A→P 間、B→R 間で許容範囲内であること、及び、B→Q 間で許容範囲を超過していることが確認できる。

まず、A→P 間、B→Q 間、B→R 間の観測高低差の較差（検測結果と観測値の差）を求める。

$$\begin{aligned} \text{A} \rightarrow \text{P 較差} &= 12.2472\text{m} - 12.2466\text{m} = 0.0006\text{m} = 0.6\text{mm} \\ \text{B} \rightarrow \text{Q 較差} &= 4.2127\text{m} - 4.2081\text{m} = 0.0046\text{m} = 4.6\text{mm} \\ \text{B} \rightarrow \text{R 較差} &= 9.0181\text{m} - 9.0133\text{m} = 0.0048\text{m} = 4.8\text{mm} \end{aligned}$$

次に、較差の許容範囲を求める。

$$\begin{aligned} \text{A} \rightarrow \text{P 許容範囲} &= 2.5 \times \sqrt{4} = 5\text{mm} \\ \text{B} \rightarrow \text{Q 許容範囲} &= 2.5 \times \sqrt{3.24} = 4.5\text{mm} \\ \text{B} \rightarrow \text{R 許容範囲} &= 2.5 \times \sqrt{5.76} = 6\text{mm} \end{aligned}$$

それぞれの較差と、較差の許容範囲を比較することで、A→P 間（ $0.6 < 5$ ）、B→R 間（ $4.8 < 6$ ）で許容範囲内であることと、B→Q 間（ $4.6 > 4.5$ ）で許容範囲を超過していることを確かめることができる。

問 D - 2

路線 $A \rightarrow S \rightarrow T \rightarrow A$ と路線 $B \rightarrow S \rightarrow T \rightarrow B$ の環閉合差を計算すると

$$5.4029\text{m} - 2.8022\text{m} - 2.5983\text{m} = 2.4\text{mm}$$

$$- 2.6027\text{m} - 2.8022\text{m} + 5.4012\text{m} = - 3.7\text{mm}$$

となる。

許容範囲を計算すると、いずれも

$$2\text{mm} \times \sqrt{7.00} = 5.2915\text{mm}$$

となる。

以上より、路線 $A \rightarrow S \rightarrow T \rightarrow A$ と路線 $B \rightarrow S \rightarrow T \rightarrow B$ の 2 つの路線の環閉合差がともに許容範囲内であることが確認できる。

まずは、路線方向を図に記入し、方向に注意しながら環を作成する。作成される環は、路線 $A \rightarrow S \rightarrow T \rightarrow A$ が路線(1)+(4)-(5)となり、路線 $B \rightarrow S \rightarrow T \rightarrow B$ が路線-(2)+(4)+(3)となる。

それぞれの環について、環閉合差を求める。

$$(1)+(4)-(5)\text{環閉合差} = 5.4029 - 2.8022 - 2.5983 = 0.0024\text{m} = 2.4\text{mm}$$

$$-(2)+(4)+(3)\text{環閉合差} = - 2.6027 - 2.8022 + 5.4012 = - 0.0037\text{m} = - 3.7\text{mm}$$

いずれの環も距離は、 $1 + 4 + 2 = 7\text{km}$ となるため、環の閉合差の許容範囲 ($2\text{mm}\sqrt{5}$) は、 $2 \times \sqrt{7} \div 5.2915\text{mm}$ となる。

それぞれの環閉合差と、環閉合差の許容範囲を比較することで、路線 $A \rightarrow S \rightarrow T \rightarrow A$ と路線 $B \rightarrow S \rightarrow T \rightarrow B$ の 2 つの路線の環閉合差がともに許容範囲内であることが確認できる。

問D－3

ア	0.0029
イ	0.0012
ウ	0.50
エ	1.00
オ	0.25
カ	-0.0026
キ	1.75
ク	1.75
ケ	0.0010
コ	15.4010

ア 0.0029 ／ イ 0.0012

観測方程式は、各新点の仮定標高（H）への補正量（X）と、各路線の観測比高（ Δh ）への補正量である残差（V）の行列により表示され、各路線において以下の式が成り立つ。

$$V = (\text{到着点 H} + \text{到着点 X}) - (\text{出発点 H} + \text{出発点 X}) - \Delta h$$

すべての路線を上のに当てはめると、以下ようになる。なお、AとBは既知点であるため仮定標高がない。

$$V_1 = (H_S + X_S) - H_A - \Delta h_1$$

$$V_2 = H_B - (H_S + X_S) - \Delta h_2$$

$$V_3 = H_B - (H_T + X_T) - \Delta h_3$$

$$V_4 = (H_T + X_T) - (H_S + X_S) - \Delta h_4$$

$$V_5 = (H_T + X_T) - H_A - \Delta h_5$$

$$V_1 = (15.4000 + X_S) - 10.0000 - 5.4029$$

$$V_2 = 18.0000 - (15.4000 + X_S) - 2.6027$$

$$V_3 = 18.0000 - (12.6000 + X_T) - 5.4012$$

$$V_4 = (12.6000 + X_T) - (15.4000 + X_S) - (-2.8022)$$

$$V_5 = (12.6000 + X_T) - 10.0000 - 2.5983$$

$$V_1 = X_S - 0.0029$$

$$V_2 = -X_S - 0.0027$$

$$V_3 = -X_T - 0.0012$$

$$V_4 = -X_S + X_T - (-0.0022)$$

$$V_5 = X_T - (-0.0017)$$

ウ 0.50 ／ エ 1.00 ／ オ 0.25

重量は路線長に反比例することになるため、各路線の重量（P）は、以下のようになる。

$$P_1 = 1 / 1.00 = 1.00$$

$$P_2 = 1 / 2.00 = 0.50$$

$$P_3 = 1 / 1.00 = 1.00$$

$$P_4 = 1 / 4.00 = 0.25$$

$$P_5 = 1 / 2.00 = 0.50$$

この重量の行列を P とすると、対角行列となり、

$$P = \begin{bmatrix} 1.00 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.50 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1.00 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.25 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.50 \end{bmatrix}$$

となる。

カ -0.0026 / キ 1.75 / ク 1.75

観測方程式から新点の最確標高を求める正規方程式は、以下の式となる。

$$(A^T P A) X = A^T P L$$

この式を変形すると、以下ようになる。

$$X = (A^T P A)^{-1} (A^T P L)$$

これを順次解いていく。

まず、A の転置行列は、

$$A^T = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

となるため、 $A^T P$ は、

$$A^T P = \begin{bmatrix} 1 & -0.5 & 0 & -0.25 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0.25 & 0.5 \end{bmatrix}$$

となる。

$A^T P L$ は、

$$\begin{bmatrix} 1 \times 0.0029 + -0.5 \times 0.0027 + -0.25 \times -0.0022 \\ -1 \times 0.0012 + 0.25 \times -0.0022 + 0.5 \times -0.0017 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.0021 \\ -0.0026 \end{bmatrix}$$

となり、 $A^T P A$ は、

$$\begin{bmatrix} 1 \times 1 + -0.5 \times -1 + -0.25 \times -1 & -0.25 \times 1 \\ 0.25 \times -1 & -1 \times -1 + 0.25 \times 1 + 0.5 \times 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.75 & -0.25 \\ -0.25 & 1.75 \end{bmatrix}$$

となる。

ケ 0.0010 / コ 15.4010

A^{TPA} の逆行列である $(A^{TPA})^{-1}$ は、

$$\begin{bmatrix} 1.75 & -0.25 \\ -0.25 & 1.75 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{(1.75 \times 1.75 - (-0.25) \times (-0.25))} \begin{bmatrix} 1.75 & 0.25 \\ 0.25 & 1.75 \end{bmatrix} \\ = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1.75 & 0.25 \\ 0.25 & 1.75 \end{bmatrix}$$

となる。

よって、 $(A^{TPA})^{-1} (A^{TPL})$ は、

$$\frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1.75 & 0.25 \\ 0.25 & 1.75 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.0021 \\ -0.0026 \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1.75 \times 0.0021 + 0.25 \times -0.0026 \\ 0.25 \times 0.0021 + 1.75 \times -0.0026 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.0010 \\ -0.0013 \end{bmatrix}$$

となる。

これを、仮定標高に加え、S の確定標高は $15.4000 + 0.0010 = 15.4010\text{m}$ 、
T の確定標高は $12.6000 + (-0.0013) = 12.5987\text{m}$ と求めることができる。