

問D. 水準点 S、水準点 T、水準点 U の成果改定を行うため、図 2-3 に示す路線において水準測量を行い、表 2-3 の観測結果を得た。図 2-3 の(1)~(4)は水準路線の路線番号である。網平均計算を行い水準点標高の最確値を求め、最確値と表 2-4 の改定前の標高を比較して最も変動が大きい水準点を調べたい。次の各問に答えよ。

ただし、既知点は水準点 G とし、水準点 G の標高は 10.418m とする。

なお、関数の値が必要な場合は、巻末の関数表を使用すること。

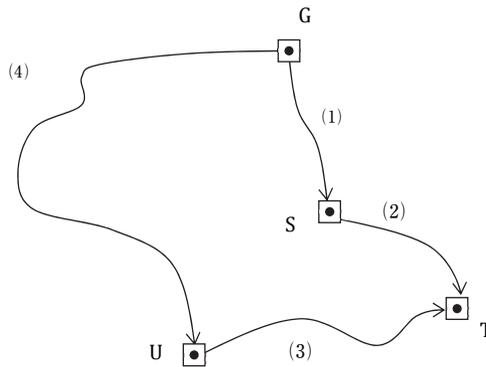


図 2-3

表 2-3

路線番号	路線方向	観測距離	観測高低差
(1)	G→S	1km	+16.187m
(2)	S→T	1km	-3.304m
(3)	U→T	2km	+3.977m
(4)	G→U	4km	+8.941m

表 2-4

水準点	改定前の標高
S	26.612m
T	23.329m
U	19.368m

問D-1. 表2-5に示す路線(1)における観測高低差の残差  $V_{GS}$  の観測方程式に倣い、路線(2)、(3)、(4)における観測高低差の残差  $V_{ST}$ 、 $V_{UT}$ 、 $V_{GU}$  の観測方程式をそれぞれ解答欄に記せ。

ただし、水準点 S、水準点 T、水準点 U の仮定標高は、表2-4に示す改定前の標高を用い、仮定標高の補正量は  $X_S$ 、 $X_T$ 、 $X_U$  で表すものとする。

表2-5

路線(1)	$V_{GS} = X_S + 0.007$
路線(2)	$V_{ST} =$
路線(3)	$V_{UT} =$
路線(4)	$V_{GU} =$

問D-2. 未知数  $X$  の係数行列を  $A$ 、定数項のベクトルを  $L$  とすると観測方程式は式2-1となる。ここで、問D-1で求めた観測方程式を行列表記すると式2-2となる。

また、観測距離に応じた重量の行列を  $P$  とすると、 $P$  は式2-3で表される。式2-2及び式2-3の ア $\sim$ サ $\sim$ オ $\sim$ ク に入る適当な数値を、それぞれ解答欄に記せ。

$$V = AX - L \quad \dots\dots \text{式2-1}$$

$$\begin{pmatrix} V_{GS} \\ V_{ST} \\ V_{UT} \\ V_{GU} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \text{ア} & \text{イ} & 0 \\ 0 & 1 & \text{ウ} \\ 0 & 0 & \text{エ} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_S \\ X_T \\ X_U \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \text{オ} \\ \text{カ} \\ \text{キ} \\ \text{ク} \end{pmatrix} \quad \dots\dots \text{式2-2}$$

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \text{ケ} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \text{コ} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \text{サ} \end{pmatrix} \quad \dots\dots \text{式2-3}$$

問D-3. 正規方程式は、式2-4で表される。正規方程式を解き、各水準点の最確値を求めたとき、変動が最も大きい水準点は水準点S、水準点、水準点Uのどれか。解答欄に記せ。

また、その点の改定前の標高と最確値の差の絶対値を mm 単位で、小数第1位を四捨五入し、整数で求め解答欄に記せ。

$$X = (A^T P A)^{-1} A^T P L \quad \cdots \cdots \text{式 2 - 4}$$

なお、 $A^T$ は行列Aの転置行列である。また、問D-2で求めたA、Pを用いると式2-4の $(A^T P A)^{-1}$ は式2-5となる。

$$(A^T P A)^{-1} = \begin{pmatrix} 0.875 & 0.750 & 0.500 \\ 0.750 & 1.500 & 1.000 \\ 0.500 & 1.000 & 2.000 \end{pmatrix} \quad \cdots \cdots \text{式 2 - 5}$$

問D

問D - 1

$V_{ST} = X_T - X_S + 0.021$
$V_{UT} = X_T - X_U - 0.016$
$V_{GU} = X_U + 0.009$

観測方程式は、各新点の仮定標高 (H) への補正量 (X) と、各路線の観測比高 ( $\Delta h$ ) への補正量である残差 (V) の行列により表示され、各路線において以下の式が成り立つ。

$$V = (\text{到着点 H} + \text{到着点 X}) - (\text{出発点 H} + \text{出発点 X}) - \Delta h$$

すべての路線を上の式に当てはめると、以下のようになる。なお、G は既知点であるため仮定標高がない。

$$V_{GS} = (H_S + X_S) - H_G - \Delta h_1$$

$$V_{ST} = (H_T + X_T) - (H_S + X_S) - \Delta h_2$$

$$V_{UT} = (H_T + X_T) - (H_U + X_U) - \Delta h_3$$

$$V_{GU} = (H_U + X_U) - H_G - \Delta h_4$$

$$V_{GS} = (26.612 + X_S) - 10.418 - 16.187$$

$$V_{ST} = (23.329 + X_T) - (26.612 + X_S) - (-3.304)$$

$$V_{UT} = (23.329 + X_T) - (19.368 + X_U) - 3.977$$

$$V_{GU} = (19.368 + X_U) - 10.418 - 8.941$$

$$V_{GS} = X_S + 0.007$$

$$V_{ST} = X_T - X_S + 0.021$$

$$V_{UT} = X_T - X_U - 0.016$$

$$V_{GU} = X_U + 0.009$$

問D-2

ア	-1
イ	1
ウ	-1
エ	1
オ	-0.007
カ	-0.021
キ	0.016
ク	-0.009
ケ	1
コ	0.5
サ	0.25

ア -1 / イ 1 / ウ -1 / エ 1  
 オ -0.007 / カ -0.021 / キ 0.016 / ク -0.009

$$\begin{aligned} V_{GS} &= X_S && - (-0.007) \\ V_{ST} &= -X_S + X_T && - (-0.021) \\ V_{UT} &= & X_T - X_U - 0.016 \\ V_{GU} &= & X_U - (-0.009) \end{aligned}$$

行列で表記すると、以下のようになる。

$$\begin{bmatrix} V_{GS} \\ V_{ST} \\ V_{UT} \\ V_{GU} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_S \\ X_T \\ X_U \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -0.007 \\ -0.021 \\ 0.016 \\ -0.009 \end{bmatrix}$$

ケ 1 / コ 0.5 / サ 0.25

重量は路線長に反比例することになるため、各路線の重量 (P) は、以下のようになる。

$$\begin{aligned} P_1 &= 1 / 1.00 = 1.00 \\ P_2 &= 1 / 1.00 = 1.00 \\ P_3 &= 1 / 2.00 = 0.50 \\ P_4 &= 1 / 4.00 = 0.25 \end{aligned}$$

この重量の行列を P とすると、対角行列となり、

$$P = \begin{bmatrix} 1.00 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1.00 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.50 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.25 \end{bmatrix}$$

となる。

問D-3

変動が最も大きい水準点	水準点U
改訂前の標高と最確値の差の絶対値	27mm

観測方程式から新点の最確標高を求める正規方程式は、以下の式となる。

$$(A^T P A) X = A^T P L$$

これを変形すると、問題に与えられた以下の式となる。

$$X = A^T P L (A^T P A)^{-1}$$

まず、A の転置行列は、

$$A^T = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

となるため、A<sup>T</sup>P は、

$$A^T P = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & -0.5 & 0.25 \end{bmatrix}$$

となる。

A<sup>T</sup>PL は、

$$\begin{bmatrix} 1 \times -0.007 + -1 \times -0.021 \\ 1 \times -0.021 + 0.5 \times 0.016 \\ -0.5 \times 0.016 + 0.25 \times -0.009 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.014 \\ -0.013 \\ -0.01025 \end{bmatrix}$$

となり、(A<sup>T</sup>P A)<sup>-1</sup> は、問題に示されているため、X = A<sup>T</sup>PL(A<sup>T</sup>P A)<sup>-1</sup> は、

$$\begin{bmatrix} X_S \\ X_T \\ X_U \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.014 \\ -0.013 \\ -0.01025 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0.875 & 0.75 & 0.5 \\ 0.75 & 1.5 & 1 \\ 0.5 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0.014 \times 0.875 - 0.013 \times 0.75 - 0.01025 \times 0.5 \\ 0.014 \times 0.75 - 0.013 \times 1.5 - 0.01025 \times 1 \\ 0.014 \times 0.5 - 0.013 \times 1 - 0.01025 \times 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.002625 \\ -0.01925 \\ -0.0265 \end{bmatrix}$$

となる。よって、もっとも変動が大きい水準点は、水準点Uであり、差の絶対値は、0.0265m = 26.5mm ≒ 27mm と求めることができる。