一般に

- パラメータが１次では、<u>包絡点</u>をもつ。

　（例）　$t(x-1)+y=0$ は、ｔの値にかかわらず定点（１，０）を通る。

- パラメータが２次以上では、<u>包絡線</u>をもつ。

> 包絡線の求め方（Ⅰ）
> 　パラメータが２次の場合・・・判別式Ｄ＝０　の式が包絡線

（例）

$y=2tx-(t+1)^2$　[tは実数]

の包絡線は、

$t^2+2(1-x)t+y+1=0$

$D/4=(1-x)^2-(y+1)=0$

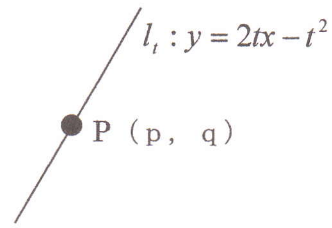
よって $y=x^2-2x$ が包絡線

実数 t に対して xy 平面上の直線 $l_t : y = 2tx - t^2$ を考える。

（1） 点 P を通る直線 l_t はただ 1 つであるとする。このような点 P の軌跡の方程式を求めよ。

（2） t が $|t| \geqq 1$ の範囲を動くとき、直線 l_t が通る点（x， y）の全体を図示せよ。

（1）点 P の座標を $(p,\ q)$ とする。



直線 $l_t : y = 2tx - t^2$ が点 P $(p,\ q)$ を通るので

$$q = 2tp - t^2$$
$$t^2 - 2pt + q = 0 \quad ・・・①$$

点 P $(p,\ q)$ を通る直線 l_t がただ 1 つであるための条件は、①がただ 1 つの実数解 t をもつことなので

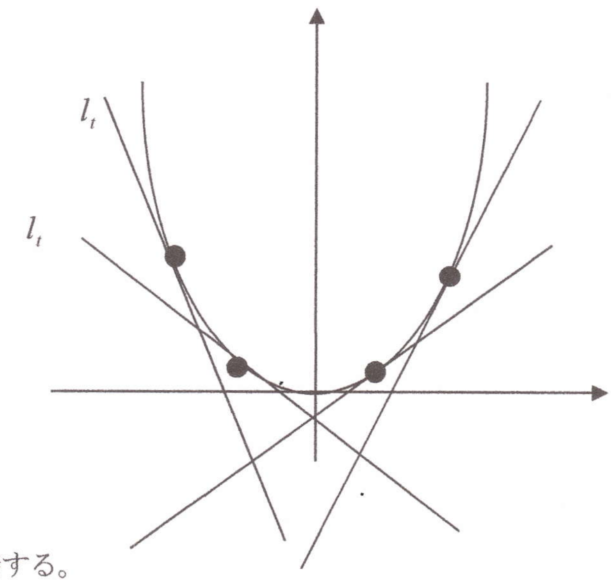
$$D/4 = p^2 - q = 0$$

したがって点 P の軌跡は $x^2 - y = 0$ $\qquad \therefore y = x^2$

すなわち l_t ： $y = 2tx - t^2$ は t に実数を代入すると、

$y = x^2$ に接しながら移動していく。

このとき、$y = x^2$ を包絡線と呼ぶ。



$$\begin{cases} l_t : y = 2tx - t^2 & ・・・① \\ y = x^2 & ・・・② \end{cases}$$

①，②を連立すると

$$x^2 = 2tx - t^2$$
$$x^2 - 2tx + t^2 = 0$$
$$(x - t)^2 = 0$$

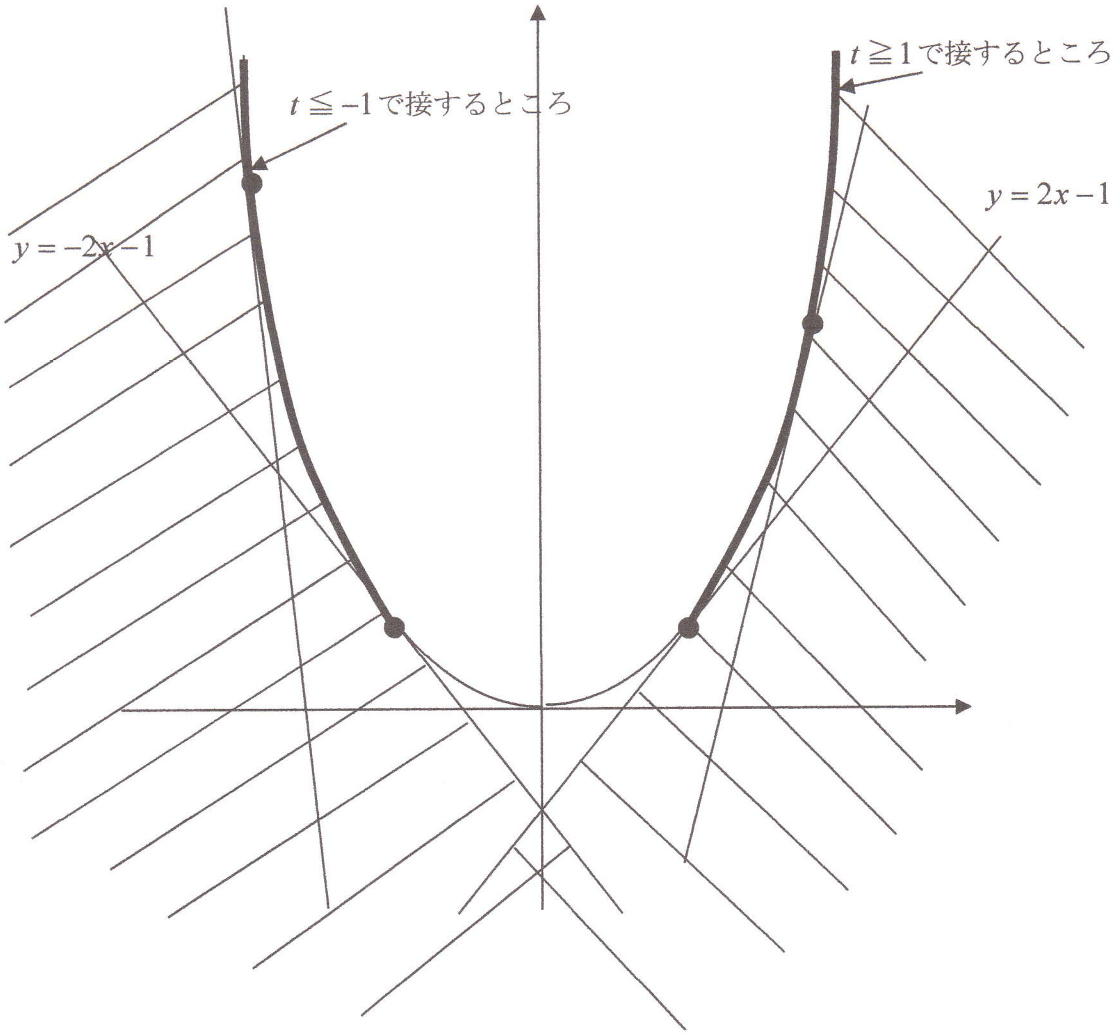
たしかに①，②は $y = x^2$ 上の点 $(t,\ t^2)$ で接する。

（2）l_t ： $y = 2tx - t^2$ は、$y = x^2$ と $(t,\ t^2)$ で接しながら移動するので、

$$|t| \geqq 1$$

すなわち$t \leqq -1$, $t \geqq 1$
を代入したときのl_tの動きを調べればよい。

$$\begin{cases} t=-1 & \cdot\cdot\cdot\ y=-2x-1 \\ t=1 & \cdot\cdot\cdot\ y=2x-1 \end{cases}$$



包絡線の求め方（Ⅱ）

$f(x, y, t)=0$ ・・・①

【$step1$】 ①をtで微分する

$\frac{d}{dt}f(x, y, t)=0$ ・・・②

【$step2$】 ②をtについて解く

$t=g(x, y)$ ・・・③

【$step3$】 ③を①に代入

$f(x, y, g(x, y))=0$

これが①の包絡線の方程式である。

なぜ、この方法で包絡線が求まるかを高校の範囲内で説明することは難しい。

前ページの問題をこの方法で解くと

$y=2tx-t^2$ ・・・①

tで微分して

$0=2x-2t$

$t=x$

これを①に代入して $y=2x^2-x^2$

$=x^2$

となり包絡線が求まる。

$at^2+bt+c=0$（ただし、a, b, cはxとyの関数とする）
の包絡線が、$b^2-4ac=0$ ◀判別式＝0
であることを示す。

$$\boxed{\begin{cases} at^2+bt+c=0 \cdots\cdots\cdots ① \\ 2at+b=0 \cdots\cdots\cdots ② \end{cases}}$$

◀ $f(x, y, t)=0$

◀ $\frac{d}{dt}f(x, y, t)=0$

② ⇒ $t=-\frac{b}{2a}$ を①に代入してtを消去すると、

$$a(-\frac{b}{2a})^2+b(-\frac{b}{2a})+c=0$$

$$\Rightarrow \frac{b^2}{4a}-\frac{b^2}{2a}+c=0$$

$$\Rightarrow -\frac{b^2}{4a}+c=0$$

$$\therefore b^2-4ac=0$$