

数 学 I

(全問必答)

第1問 (配点 25)

[1]

(1) x を実数とし

$$A = x(x+1)(x+2)(5-x)(6-x)(7-x)$$

とおく。整数 n に対して

$$(x+n)(n+5-x) = x(5-x) + n^2 + \boxed{\text{ア}}n$$

であり、したがって、 $X = x(5-x)$ とおくと

$$A = X(X + \boxed{\text{イ}})(X + \boxed{\text{ウエ}})$$

と表せる。

$$x = \frac{5 + \sqrt{17}}{2} \text{ のとき, } X = \boxed{\text{オ}} \text{ であり, } A = 2\boxed{\text{カ}} \text{ である。}$$

(数学 I 第1問は次ページに続く。)

(2) 実数 x が

$$(x + 1)(x + 2)(6 - x)(7 - x) = -16$$

を満たすとき、 $x(5 - x) =$ キクケ である。したがって、このとき

$$x = \frac{\text{コ} \pm \sqrt{\text{サシ}}}{\text{ス}}$$

である。

(数学 I 第 1 問は次ページに続く。)

数学 I

{2}

(1) 全体集合 U を $U = \{x \mid x \text{ は } 20 \text{ 以下の自然数}\}$ とし、次の部分集合 A, B, C を考える。

$$A = \{x \mid x \in U \text{ かつ } x \text{ は } 20 \text{ の約数}\}$$

$$B = \{x \mid x \in U \text{ かつ } x \text{ は } 3 \text{ の倍数}\}$$

$$C = \{x \mid x \in U \text{ かつ } x \text{ は偶数}\}$$

集合 A の補集合を \overline{A} と表し、空集合を \emptyset と表す。

次の に当てはまるものを、下の①~③のうちから一つ選べ。

集合の関係

(a) $A \subset C$

(b) $A \cap B = \emptyset$

の正誤の組合せとして正しいものは である。

	①	②	③
(a)	正	正	誤
(b)	正	誤	正

(数学 I 第 1 問は次ページに続く。)

次の に当てはまるものを、下の①～④のうちから一つ選べ。

集合の関係

(c) $(A \cup C) \cap B = \{6, 12, 18\}$

(d) $(\bar{A} \cap C) \cup B = \bar{A} \cap (B \cup C)$

の正誤の組合せとして正しいものは である。

	①	②	③
(c)	正	正	誤
(d)	正	誤	正

(2) 実数 x に関する次の条件 p, q, r, s を考える。

$$p: |x - 2| > 2, \quad q: x < 0, \quad r: x > 4, \quad s: \sqrt{x^2} > 4$$

次の , に当てはまるものを、下の①～④のうちからそれぞれ一つ選べ。ただし、同じものを繰り返し選んでもよい。

q または r であることは、 p であるための 。また、 s は r であるための 。

- ① 必要条件であるが、十分条件ではない
- ② 十分条件であるが、必要条件ではない
- ③ 必要十分条件である
- ④ 必要条件でも十分条件でもない

数学 I

第 2 問 (配点 25)

a を正の実数とし

$$f(x) = ax^2 - 2(a+3)x - 3a + 21$$

とする。2 次関数 $y = f(x)$ のグラフの頂点の x 座標を p とおくと

$$p = \boxed{\text{ア}} + \frac{\boxed{\text{イ}}}{a}$$

である。

(1) $0 \leq x \leq 4$ における関数 $y = f(x)$ の最小値が $f(4)$ となるような a の値の範囲は

$$0 < a \leq \boxed{\text{ウ}}$$

である。

また、 $0 \leq x \leq 4$ における関数 $y = f(x)$ の最小値が $f(p)$ となるような a の値の範囲は

$$\boxed{\text{エ}} \leq a$$

である。

したがって、 $0 \leq x \leq 4$ における関数 $y = f(x)$ の最小値が 1 であるのは

$$a = \frac{\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カ}}} \quad \text{または} \quad a = \frac{\boxed{\text{キ}} + \sqrt{\boxed{\text{クケ}}}}{\boxed{\text{コ}}}$$

のときである。

(数学 I 第 2 問は次ページに続く。)

(2) 関数 $y = f(x)$ のグラフが x 軸と異なる 2 点で交わるのは

$$0 < a < \frac{\boxed{\text{サ}}}{\boxed{\text{シ}}} \quad \text{または} \quad \boxed{\text{ス}} < a$$

のときである。この二つの交点の間の距離を L とする。 $2 < L < 4$ となるような a の値の範囲は

$$\frac{\boxed{\text{セ}}}{\boxed{\text{ソ}}} < a < \frac{\boxed{\text{タ}} - \sqrt{\boxed{\text{チツ}}}}{\boxed{\text{テ}}}, \quad \frac{\boxed{\text{ト}} + \sqrt{\boxed{\text{ナニ}}}}{\boxed{\text{ヌ}}} < a$$

である。

数学 I

第 3 問 (配点 30)

$\triangle ABC$ において、 $AB = 6$ 、 $BC = \sqrt{21}$ 、 $AC = 3$ とする。

(1) このとき

$$\cos \angle BAC = \frac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}}, \quad \sin \angle BAC = \frac{\sqrt{\boxed{\text{ウ}}}}{\boxed{\text{エ}}}$$

である。

(数学 I 第 3 問は次ページに続く。)

数学 I

(2) 点Cから辺ABに下ろした垂線をCHとするとき、 $AH = \boxed{\text{オ}}$ 、
 $CH = \sqrt{\boxed{\text{カ}}}$ である。また、線分CH上に $AH = HD$ を満たす点Dをと
 るとき、 $AD = \boxed{\text{キ}} \sqrt{\boxed{\text{ク}}}$ 、 $CD = \sqrt{\boxed{\text{ケ}}} - \boxed{\text{コ}}$ であるから

$$\triangle ACD \text{ の面積} = \sqrt{\boxed{\text{サ}}} - \boxed{\text{シ}}$$

であり

$$\sin \angle CAD = \frac{\sqrt{\boxed{\text{スセ}}} - \boxed{\text{ソ}} \sqrt{\boxed{\text{タ}}}}{\boxed{\text{チ}}}$$

である。したがって、 $\triangle ACD$ の外接円の半径は $\frac{\boxed{\text{ツ}} \sqrt{\boxed{\text{テ}}}}{\boxed{\text{ト}}}$ であ

る。また、辺ABの中点をEとし、直線ADと辺BCの交点をFとすると

$$\frac{\triangle ACF \text{ の面積}}{\triangle AEF \text{ の面積}} = \frac{\sqrt{\boxed{\text{ナ}}} - \boxed{\text{ニ}}}{\boxed{\text{ヌ}}}$$

である。

数学 I

第 4 問 (配点 20)

ある陸上競技大会に出場した選手の身長(単位は cm)と体重(単位は kg)のデータが得られた。男子短距離, 男子長距離, 女子短距離, 女子長距離の四つのグループに分けると, それぞれのグループの選手数は, 男子短距離が 328 人, 男子長距離が 271 人, 女子短距離が 319 人, 女子長距離が 263 人である。

- (1) 次ページの図 1 および図 2 は, 男子短距離, 男子長距離, 女子短距離, 女子長距離の四つのグループにおける, 身長のヒストグラムおよび箱ひげ図である。

次の , に当てはまるものを, 下の①~⑥のうちから一つずつ選べ。ただし, 解答の順序は問わない。

図 1 および図 2 から読み取れる内容として正しいものは, ,

である。

- ① 四つのグループのうちで範囲が最も大きいのは, 女子短距離グループである。
- ② 四つのグループのすべてにおいて, 四分位範囲は 12 未満である。
- ③ 男子長距離グループのヒストグラムでは, 度数最大の階級に中央値が入っている。
- ④ 女子長距離グループのヒストグラムでは, 度数最大の階級に第 1 四分位数が入っている。
- ⑤ すべての選手の中で最も身長の高い選手は, 男子長距離グループの中にいる。
- ⑥ すべての選手の中で最も身長の高い選手は, 女子長距離グループの中にいる。
- ⑦ 男子短距離グループの中央値と男子長距離グループの第 3 四分位数は, ともに 180 以上 182 未満である。

(数学 I 第 4 問は次ページに続く。)

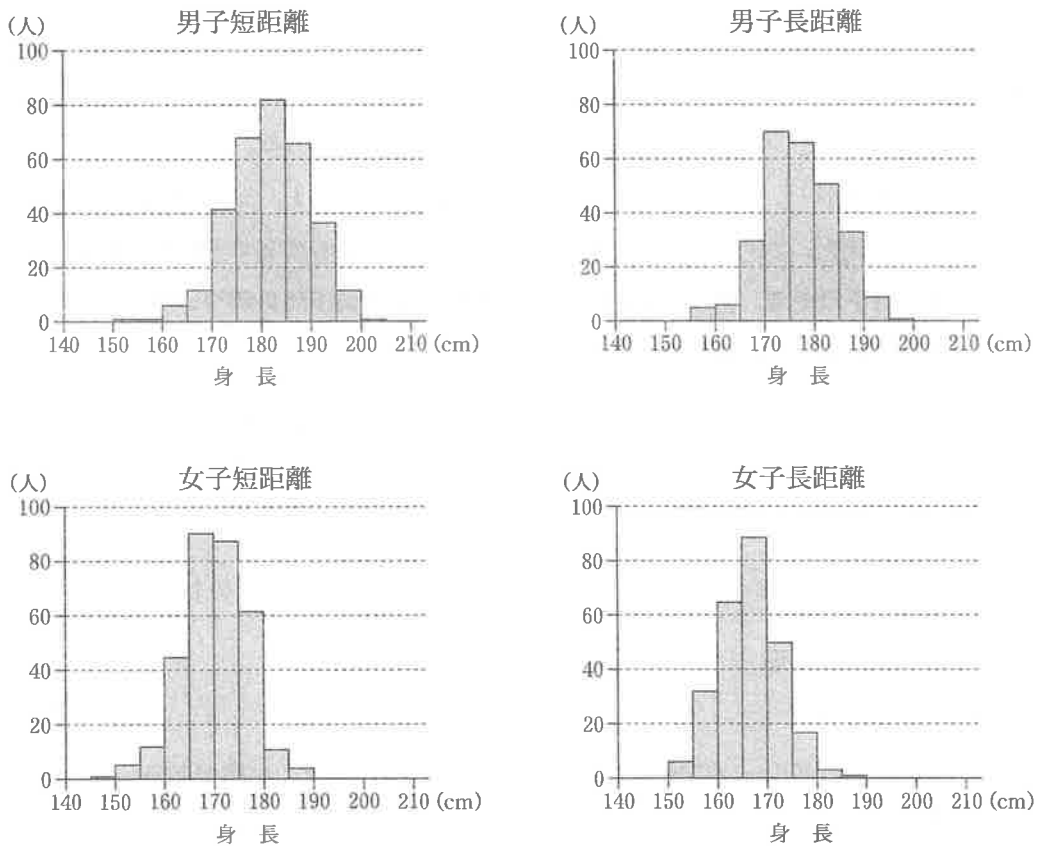


図1 身長 histograms

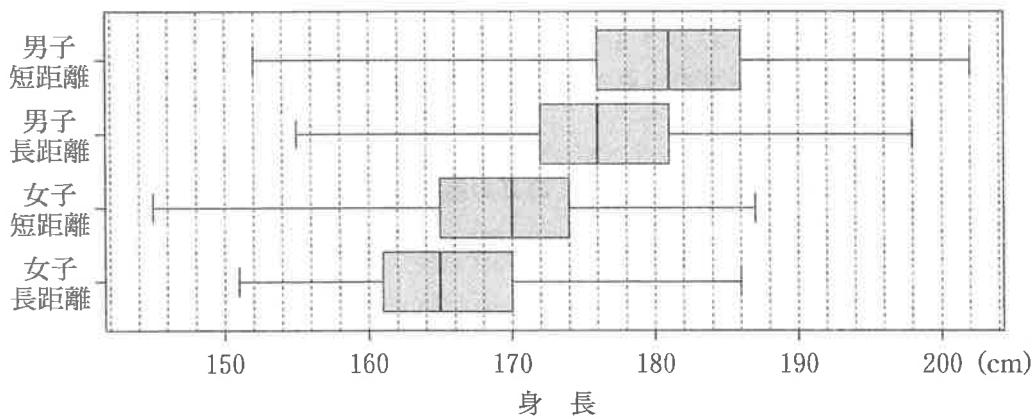


図2 身長の箱ひげ図

(出典：図1，図2はガーディアン社のWebページにより作成)

(数学 I 第4問は次ページに続く。)

数学 I

(2) 身長を H 、体重を W とし、 X を $X = \left(\frac{H}{100}\right)^2$ で、 Z を $Z = \frac{W}{X}$ で定義する。次ページの図 3 は、男子短距離、男子長距離、女子短距離、女子長距離の四つのグループにおける X と W のデータの散布図である。ただし、原点を通り、傾きが 15, 20, 25, 30 である四つの直線 l_1, l_2, l_3, l_4 も補助的に描いている。また、次ページの図 4 の(a), (b), (c), (d) で示す Z の四つの箱ひげ図は、男子短距離、男子長距離、女子短距離、女子長距離の四つのグループのいずれかの箱ひげ図に対応している。

次の ウ エ に当てはまるものを、下の ①～⑤のうちから一つずつ選べ。ただし、解答の順序は問わない。

図 3 および図 4 から読み取れる内容として正しいものは、 ウ エ

エ である。

- ① 四つのグループのすべてにおいて、 X と W には負の相関がある。
- ② 四つのグループのうちで Z の中央値が一番大きいのは、男子長距離グループである。
- ③ 四つのグループのうちで Z の範囲が最小なのは、男子長距離グループである。
- ④ 四つのグループのうちで Z の四分位範囲が最小なのは、男子短距離グループである。
- ⑤ 女子長距離グループのすべての Z の値は 25 より小さい。
- ⑥ 男子長距離グループの Z の箱ひげ図は(c)である。

(数学 I 第 4 問は次ページに続く。)

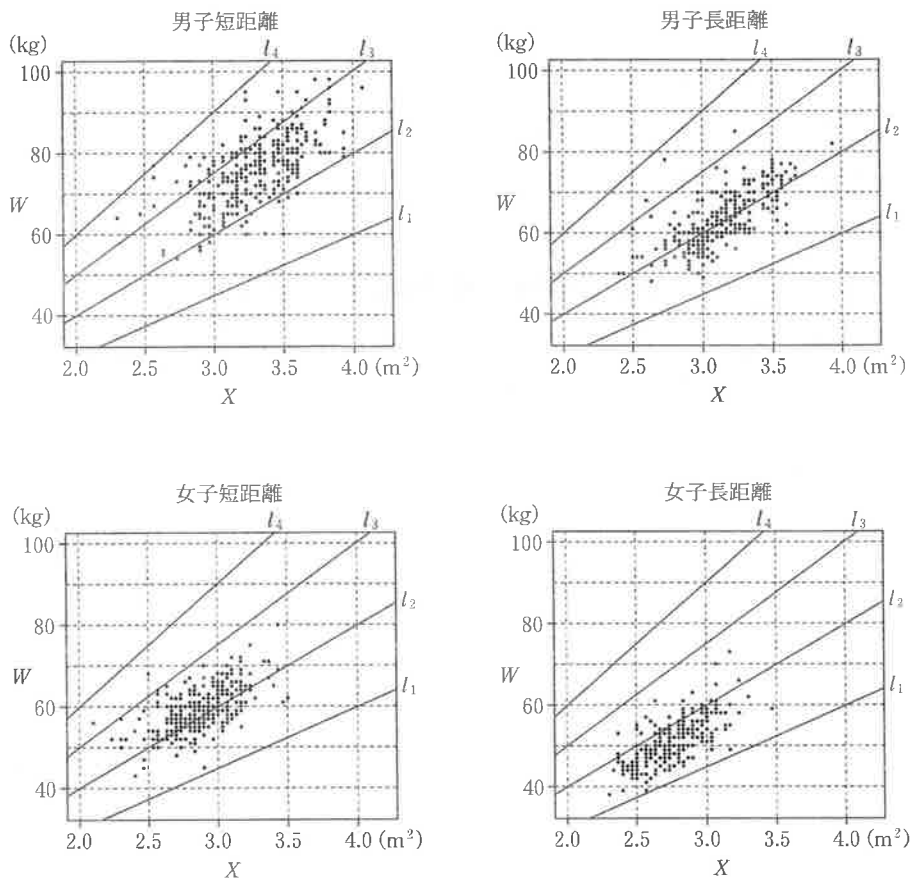


図3 X と W の散布図

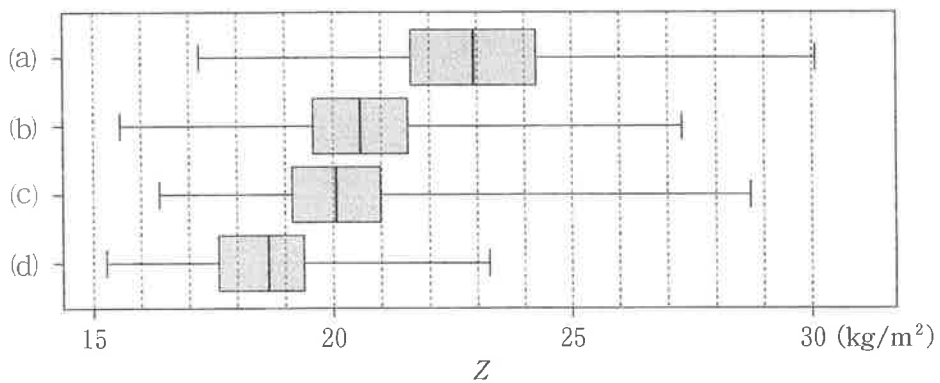


図4 Z の箱ひげ図

(出典：図3，図4はガーディアン社のWebページにより作成)

(数学I第4問は次ページに続く。)

数学 I

- (3) 次の表 1 は、設問(2)で定義された X 、 W について、女子長距離グループの平均値、標準偏差および共分散を計算したものである。ただし、 X と W の共分散は、 X の偏差と W の偏差の積の平均値である。なお、表 1 の数値は正確な値であり、四捨五入されていないものとする。

表 1 平均値、標準偏差および共分散

X の 平均値	W の 平均値	X の 標準偏差	W の 標準偏差	X と W の 共分散
2.75	51.1	0.200	5.36	0.754

次の に当てはまる数値として最も近い値を、下の①～④のうちから一つ選べ。

女子長距離グループのデータにおいて、 X と W の相関係数は、 である。

- ① 0.603 ② 0.653 ③ 0.703 ④ 0.753 ⑤ 0.803

(数学 I 第 4 問は次ページに続く。)

(4) n を自然数とする。実数値のデータ x_1, x_2, \dots, x_n に対して、平均値 \bar{x} を

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$$

とおくと、分散 s^2 は

$$s^2 = \frac{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}{n} - (\bar{x})^2$$

で計算できることが知られている。

次の 、 に当てはまる数値として最も近い値を、下の①～⑧のうちから一つずつ選べ。ただし、同じものを繰り返し選んでもよい。

女子長距離グループのデータについて考える。

設問(2)で定義された X と H の関係を用いると、設問(3)の表 1 の数値により、このグループの身長を各々 2 乗した値の平均値は である。また、このグループの身長の平均値が 165.7 のとき、このグループの身長を各々 2 乗した値の分散は である。必要ならば、 $165.7^2 = 27456.49$ を用いてもよい。

- | | | | | |
|--------|--------|---------|---------|---------|
| ① 4.00 | ② 27.5 | ③ 43.5 | ④ 44.7 | ⑤ 104.4 |
| ⑥ 275 | ⑦ 400 | ⑧ 27500 | ⑨ 72325 | |

数学 I

(下書き用紙)