



発電所 (解説)

問題をグラフの言葉で言い換えると、発電所の構造は木構造であり、各基地は頂点と言い換えることができる。

小課題 1

木の頂点数が少ないので、どの発電機を ON にするかすべて試すことができる。ON にした発電機を根とした根付き木上で、深さ優先探索 (DFS) をすると $O(N)$ で利益を計算することができる。全体で $O(N2^N)$ の時間計算量で解くことができる。

$N \leq 16$ であるので、利益の計算に $O(N^2)$ や $O(N^3)$ の時間をかけてもよい。

小課題 1 (別解)

最終的に、稼働しているまたは壊れている発電機をすべて含むような、最小の部分木を考える。するとそのような部分木では、すべての葉の頂点は稼働した発電機があり、葉でない頂点にある発電機はすべて壊れている。よってすべての部分木を調べ、すべての葉の頂点に発電機があるもので、

$$\text{「葉の頂点数」} - \text{「葉でない頂点の発電機の個数」}$$

の最大値を求めることで解くこともできる。

小課題 2

ON にする発電機を一つ決めてみよう。つまりその発電機を ON にしたときの利益の最大値を求める問題を考える。その頂点を根として根付き木にしよう。すると根を除く各発電機が壊れるかどうかは、その頂点の子孫に、ON にした発電機があるかどうかによって定まる。このように書くと、動的計画法で解くことができそうに思えるだろう。

各頂点 v について、その頂点と子孫について、発電機の ON/OFF を決めたときの、

$$\text{「稼働している発電機の個数」} - \text{「壊れた発電機の個数」}$$

の最大値を dp_v とする。これを葉から順に更新していく。

頂点 v の更新を考える。各頂点 v について v にある発電機の個数を E_v とする ($E_v = 0, 1$)。上で述べたように頂点 v の状態を決めるときは子孫に ON の発電機がある場合とない場合のみ考えればよい。

- 頂点 v の子孫で ON にした発電機がない場合



子孫の発電機はすべて OFF になっているので、 v に発電機があるなら ON にして稼働させた方がよい。よって E_v が最大値となる。

- 頂点 v の子孫で ON にした発電機があってもよい場合

子孫の発電機の ON/OFF を自由に決めることができるので、 v の子の dp の和をとればよい。ただし v に発電機があるなら、その発電機は壊れると考える。

まとめると漸化式は以下のようなになる。

$$dp_v = \max \left\{ E_v, \left(\sum_{c: \text{a child of } v} dp_c \right) - E_v \right\}$$

これを深さ優先探索 (DFS) で順に計算していけばよい。ただし根においては、ある一つの子ともその子孫に、ON の発電機があっても、根の発電機は壊れないことに注意せよ。

これである発電機を ON にしたときの最大値を $O(N)$ 時間で求めることができた。よって、ON にする発電機をすべて試すことで、 $O(N^2)$ 時間で元の問題を解くことができる。

小課題 3 (満点解法)

小課題 2 の dp は根の発電機を ON と決めたことで、子孫の情報のみで、各頂点の発電機が壊れるかを定めることができるため、計算することができた。満点解法でも、適当な頂点を根として、この dp を計算する。これは各頂点について、その部分木の外に ON の発電機があると仮定して、その部分木の ON/OFF を決めたときの、利益の最大値を求めていると考えることができる。この dp の結果を使って答えを求めていく。

もれなく最大値を求めるために、小課題 1 (別解) で考えた、最終的に稼働しているまたは壊れている発電機をすべて含むような、最小の部分木を考える。各頂点 v では、この最小の部分木で、根にもっとも近い頂点が v であるようなものの最大値を計算する。これをすべての頂点について計算できれば、答えが求まることが分かる。

頂点 v での計算を考える。

- 頂点 v に発電機があって稼働する場合

高々一つの子の部分木だけ ON/OFF を自由に決めることができる。それ以外の子の部分木はすべて OFF にしなければならない。したがって

$$\max \{ dp_c \mid c : \text{a child of } v \} + 1$$

で計算できる。

- 頂点 v に発電機があって壊れてもいい場合

子孫の発電機の ON/OFF を自由に決めることができるので、 v の子の dp の和をとればよい。 v の発電機は壊れるとして

$$\left(\sum_{c: \text{a child of } v} dp_c \right) - 1$$



で計算できる。

- 頂点 v に発電機がない場合

上の場合と同じで子孫の ON/OFF を自由に決めることができるので

$$\sum_{c: \text{a child of } v} dp_c$$

で計算できる。

まとめると各頂点 v について

- $E_v = 1$ なら

$$\max \left\{ \max \{ dp_c \mid c : \text{a child of } v \} + 1, \left(\sum_{c: \text{a child of } v} dp_c \right) - 1 \right\}$$

- $E_v = 0$ なら

$$\sum_{c: \text{a child of } v} dp_c$$

を計算しその最大値が答えとなる。

このようなアルゴリズムによって、 $O(N)$ の時間計算量で解くことができる。