白黒の点 (解説)

小課題 1

この制約の下では線分の引き方を $N!$ 通りすべて試すことができる．交点数は $O(N^2)$ の計算量で求めることができるので，全体として $O(N^2 \cdot N!)$ の計算量で解くことができる．

小課題 2,3

白い点を番号の昇順に $w_1, w_2, \ldots, w_N$，黒い点を番号の昇順に $b_1, b_2, \ldots, b_N$ とする．このとき最適な線分の引き方は，ある整数 k を用いて w_i と b_{i+k} を結ぶ引き方であることを示す．ただし i は 1 から N までを動き，添え字は mod N で考えている．

最適な引き方において w_i と線分を結ぶ点を b_{p_i} とする．まず異なる i, j について $w_i, w_j, b_{p_j}, b_{p_i}$ はこの順に時計回りに並んでいてはいけない．実際この順に並んでいるとすると，w_i と b_{p_j} を結び，w_j と b_{p_i} を結ぶことで交点数が増え矛盾する．次に $p_i - i \equiv p_{i+1} - (i+1)$ であることを示す．実際そうでない i が存在すると，b_{p_i} から $b_{p_{i+1}}$ までの間に他の黒い点 b_{p_j} が存在することになる．ここで $w_i, w_{i+1}, b_{p_i}, b_{p_{i+1}}$ の位置関係を考える．上で示したことから，$w_i, w_{i+1}, b_{p_{i+1}}, b_{p_i}$ がこの順に並ぶことや，$w_i, b_{p_i}, b_{p_{i+1}}, w_{i+1}$ がこの順に並ぶことはない．$w_i, w_{i+1}, b_{p_i}, b_{p_{i+1}}$ がこの順に並んでいるとき，w_i から w_{i+1} までの間に他の白い点は存在しないので，w_j は w_{i+1} から b_{p_j} までの間，もしくは b_{p_j} から w_i までの間にあることになる．これは先の性質に矛盾する．他にも 3 通りの位置関係が考えられるが ($w_i, b_{p_{i+1}}, b_{p_i}, w_{i+1}$ がこの順に並んでいるとき，w_i, b_{p_i}, $w_{i+1}, b_{p_{i+1}}$ がこの順に並んでいるとき，$w_i, b_{p_{i+1}}, w_{i+1}, b_{p_i}$ がこの順に並んでいるとき)，いずれの場合も同様に矛盾する．

よって最適な線分の引き方は，ある整数 k を用いて w_i と b_{i+k} を結ぶ引き方である．したがって k の候補を N 通り試し，それぞれにおいて交点数を $O(N^2)$ の計算量で計算することで，全体として $O(N^3)$ の計算量で解くことができる．また binary indexed tree や segment tree といったデータ構造を用いると，転倒数の計算と同じ要領で，交点数を $O(N \log N)$ の計算量で求めることができる．よって $O(N^2 \log N)$ の計算量で解くことができ，これで小課題 3 までを解くことができる．

小課題 4（満点解法）

小課題 2，3 と同様に，k を固定して w_i と b_{i+k} を結ぶときの交点数を求める．i を固定し，w_i と b_{i+k} を結ぶ線分と交わる線分の個数を考える．その 2 点を端点とする 2 つの円弧に注目し，それぞれが端点以外に含む点の個数を小さい順に L，R とする．このとき w_i と b_{i+k} を結ぶ線分と交わる線分は高々 L 個であるが，

実はこの評価は等号が成立し，必ず L 個の線分が交わる．このことを示そう．

含む点の個数が多くないほうの円弧を固定し，その円弧に含まれる点を一つ固定する．一般性を失わずにその点は白い点であるとしてよい．その点を w_j とする．このとき $w_i, w_j, b_{j+k}, b_{i+k}$ が，時計回りにも反時計回りにもこの順に並ばないことを示せばよい．時計回りに順に並んでいると仮定して矛盾を導く．反時計回りの場合も同様である．

今仮定より w_i から b_{i+k} までの間には点は L 個ある．$L+R=2N-2$ および $L \leqq R$ より $L \leqq N-1$ なので，特にその間にある点の個数は高々 $N-1$ 個である．ここで適切に番号を付け替えることで $i<j$ としてよい．このとき w_i から w_j までの間に白い点は $j-i-1$ 個あり，b_{j+k} から b_{i+k} までの間に黒い点は $N-(j-i+1)$ 個ある．よって w_i から b_{i+k} までの間に点が $(j-i-1)+(N-(j-i+1))+2=N$ 個以上あることになり，矛盾する．

よって，w_i と b_{i+k} を結ぶ線分と交わる線分の個数は，その 2 点を端点とする円弧が内部に含む点の個数のうち，多くない方の個数である．この値は適切な場合分けの下で，w_i と b_{i+k} の一次関数により表せるので，各 i について，ある k の区間にある一次関数を加算する，という操作ができればこの問題が解ける．この操作は累積和のテクニックにより線形時間で行うことができる．また，一次関数を加算する区間を適切に求める必要があるが，これは i を昇順に見ていくことで，線形時間で管理することができる．よって，全体として $O(N)$ の時間計算量でこの問題を解くことができる．

余談

各 k についての交点数を $f(k)$ とすると実は $f(k)$ はある種の単調性を持つ．f の定義域を $\mathrm{mod}\ N$ で考えることにすると次の性質が成り立つ．

> a，b をそれぞれ f が最小，最大になる点とする．このとき f は $a, a+1, \ldots, b$ において広義単調増加であり，$b, b+1, \ldots, a$ において広義単調減少である．

証明を簡潔にするため，これ以降 $2N$ 個の点は円周を $2N$ 等分するとし，さらに円周の長さは $2N$ であるとする．そして円周上の 2 点 p, q について，$d(p,q)$ で p と q を端点にもつ円弧のうち長くない方の円弧の長さを，$d'(p,q)$ で p から q まで時計回りに移動するときの移動距離を，$[p,q)$ で p から q まで時計回りに移動するときに通る円弧（ただし p は含み q は含まない）を表すことにする．黒い点が N 点すべて連続しており，白い点も N 点すべて連続している場合，単調性は簡単に確認できる．以下そうでない場合，つまりすべての i について $d'(b_i, b_{i+1}) \leqq N$ となる場合を考える．

このとき $k \mapsto \sum_{i=1}^{N} d(w_i, b_{i+k})/2$ という関数が f に課された単調性を満たすことを示せばよい．$g(k) = \sum_{i=1}^{N}(d(w_i, b_{i+k+1}) - d(w_i, b_{i+k}))/2$ とおくと，示すべき主張は $\{k \mid g(k) \geqq 0\}$ と $\{k \mid g(k) \leqq 0\}$ がともに区間であることとなる．特に g が f に課された単調性と等しい単調性を持つことを示せば十分である．以下これを示す．

円周上の点 w を時計回りに動かして $(d(w, b_{i+k+1}) - d(w, b_{i+k}))/2$ の値の変動を調べる．b_{i+k}，b_{i+k+1} の対

蹠点をそれぞれ b'_{i+k}，b'_{i+k+1} とする．w を時計回りに正の微小量 Δw だけ動かすと w が $[b_{i+k}, b_{i+k+1})$ にある場合は変化量は $-\Delta w$，$[b_{i+k+1}, b'_{i+k})$ にある場合は変化量は 0，$[b'_{i+k}, b'_{i+k+1})$ の間にある場合は変化量は Δw，$[b'_{i+k+1}, b_{i+k})$ にある場合は変化量は 0 である．これより $h(k) = g(k+1) - g(k)$ は次のようにして定まる値とわかる．

$$h(k) = \sum_{i=1}^{N} \Big| [w_{i-1}, w_i) \cap [b_{i+k}, b_{i+k+1}) \Big| - \Big| [w_{i-1}, w_i) \cap [b'_{i+k}, b'_{i+k+1}) \Big|$$

ただし $|\cdot|$ で円弧の長さを表した．ここで $1 \leqq p \leqq 2N$ なる各整数 p について，p 番目の点から自身を含め反時計回りに一番近い黒い点が b_{s_p} となるように s_p を定め，p 番目の点から自身を含め反時計回りに一番近い白い点が w_{t_p} となるように t_p を定める．ただし，s_p, t_p が N である場合は，その値を N ではなく 0 に取り換える．また $p > 2N$ なる整数 p については $s_p = s_{p-2N} + N, t_p = t_{p-2N} + N$ と s_p, t_p を定める．すると先ほどの $h(k)$ の表示より

$$\begin{aligned} h(k) &= \sum_{i=1}^{N} \Big| \Big\{ 1 \leqq p \leqq 2N \,\Big|\, s_p \equiv i+k, t_p \equiv i-1 \Big\} \Big| - \Big| \Big\{ 1 \leqq p \leqq 2N \,\Big|\, s_{p+N} \equiv i+k, t_p \equiv i-1 \Big\} \Big| \\ &= \Big| \Big\{ 1 \leqq p \leqq 2N \,\Big|\, s_p - t_p \equiv k+1 \Big\} \Big| - \Big| \Big\{ 1 \leqq p \leqq 2N \,\Big|\, s_{p+N} - t_p \equiv k+1 \Big\} \Big| \end{aligned}$$

を得る．ただし合同式の法は N である．よって $g(k)$ は，各点 p について $[s_p - t_p, s_{p+N} - t_p)$ に 1 を加算して得られる関数，に定数関数を加算して得られる関数であることがわかる．定数関数の差は単調性を示すうえでは無視できるので，

$$k \mapsto \Big| \Big\{ 1 \leqq p \leqq 2N \,\Big|\, k \in [s_p - t_p, s_{p+N} - t_p) \Big\} \Big|$$

という関数が f に課された単調性を持つことを示せば十分である．

ここで点の番号づけを工夫することで，すべての i について，1 番目の点から i 番目の点までに含まれる黒い点の個数がその間に含まれる白い点の個数以上であるとしてよい．これは元の番号づけにおいて，1 番目の点から i 番目の点までに含まれる黒い点の個数からその間に含まれる白い点の個数を引いた値が一番小さい i をとり，i 番目の点が新たな番号づけにおいて 1 番目の点となるように取り換えることにより可能である．

定義より s_p 及び t_p の値はそれぞれ 1 番目の点から p 番目の点までに含まれる黒い点の個数，白い点の個数である．よって番号づけの仕方よりすべての p に対して $s_p - t_p \geqq 0$ である．また $1 \leqq p \leqq N$ に対して $s_{p+N} \leqq N$ より $s_{p+N} - t_p \leqq N$ であり，$p \leqq t_{p+N}$ より $s_{p+2N} - t_{p+N} = N + s_p - t_{p+N} \leqq N + s_p - p \leqq N$ であるので，すべての $1 \leqq p \leqq 2N$ に対して $s_{p+N} - t_p \leqq N$ である．よって $0 \leqq s_p - t_p \leqq s_{p+N} - t_p \leqq N$ がすべての $1 \leqq p \leqq 2N$ について成り立つので，求める単調性を示すには，すべての $1 \leqq p, q \leqq 2N$ について $s_q - t_q \leqq s_{p+N} - t_p$ となることを示せば十分である．

$p \leqq q \leqq p+N$ の場合は $s_q - s_{p+N} \leqq 0 \leqq t_q - t_p$ より従う．$p+N < q$ の場合は $s_q - s_{p+N} \leqq q-(p+N) \leqq t_q - t_p$ より従う．$q < p \leqq N$ の場合は $s_q + t_p \leqq p \leqq s_{p+N} \leqq s_{p+N} + t_q$ より従う．$q < p$ かつ $p > N$ の場合は $p - q \leqq N$ ならば $s_{p+N} - s_q \geqq (p+N) - q - N = p - q \geqq t_p - t_q$ より従う．最後に $q < p$ かつ $p - q > N$ のとき，$r = p - N > q$ とすると $s_{p+N} - t_p = s_r + (N - t_p) \geqq s_r \geqq s_q \geqq s_q - t_q$ より従う．

以上より，すべての $1 \leqq p, q \leqq 2N$ について $s_q - t_q \leqq s_{p+N} - t_p$ であるので，示された．