家具の配置 (解説)

最初から置いてある家具を作業の結果置かれたものと考えれば，最初に家具が存在しない場合の解法を考えればよいことが分かる．より具体的には，問題で与えられる作業の前に $C_{i,j} = 1$ となる (i, j) への作業があるとして，結果の出力はしないようにすればよい．

小課題 1

この小課題では，作業の度に $O(NM)$ 程度の計算を行うことが出来る．よって各作業では一度家具を置いたとして部屋が良い配置であるか判定し，そうでなかったら家具を取り除けばよい．

部屋が良い配置であるかどうかは，幅優先探索や深さ優先探索，動的計画法などで $O(NM)$ で判定することが出来る．

小課題 2（満点解法）

良い配置の条件にあるような移動を**良い移動**と呼ぶ．$R_{i,j}$ を，(i, j) を通る良い移動が存在する時 0，そうでないときに 1 と定義する．

(X, Y) に作業を行うことを考える．

1. $R_{X,Y} = 1$ の場合
   (X, Y) を通る良い移動は存在しない．よって (X, Y) に家具を置いてもいずれの良い移動も良い移動でなくなることはなく，良い配置である．
2. $R_{X,Y} = 0$ の場合
   (X, Y) に家具を置くことで，(X, Y) を通るような良い移動は良い移動でなくなる．そのうえで他に良い移動が存在するかどうかが問題となる．
   (a) $R_{V,W} = 0, V + W = X + W, (V, W) \neq (X, Y)$ となる (V, W) が存在する場合
   このとき，(X, Y) に家具を置いても良い配置は保たれる．なぜなら，(V, W) を通る良い移動が存在し，その移動は (X, Y) を通らず，家具を置いても良い移動となるためである．これは，良い移動で通る区画 (x, y) が $x + y$ を増加させる方向に移動するため，$x + y$ が等しいような区画を二度通ることはないことから分かる．
   (b) そのような (V, W) が存在しない場合
   このとき，(X, Y) に家具を置くと良い配置ではなくなる．なぜなら，すべての良い移動は (X, Y) を通り，(X, Y) に家具を置くと良い移動が存在しなくなるためである．これは，良い移動は通る区画 (x, y) について $x + y$ を丁度 1 ずつ増加させる方向に移動するため，$X + Y = v + w$ となる

(v, w) を必ず通り，条件からそのような (v, w) は (X, Y) しか存在しないことから分かる．

以上より，$R_{i,j}$ を効率的に管理できればよい．まず，(X, Y) に家具を置いたとき $R_{X,Y} \leftarrow 1$ と更新される．また，これによって他にもいくつかの (x, y) について $R_{x,y} \leftarrow 1$ と更新する必要があるかもしれない．そのような (x, y) は次のように判定できる．

- $R_{x+1,y} = 1$ かつ $R_{x,y+1} = 1$
  このとき，(x, y) から (N, M) に到達することが出来ない．よって (x, y) を通る良い移動は存在しない．
- $R_{x-1,y} = 1$ かつ $R_{x,y-1} = 1$
  このとき，$(1, 1)$ から (x, y) に到達することが出来ない．よって (x, y) を通る良い移動は存在しない．

逆に，以上の条件に該当する区画が存在しない時，R は正しく更新されている．$R_{x,y} = 0$ となるいずれの (x, y) についても $R_{x+1,y} = 0$ または $R_{x,y+1} = 0$ であるから，その区画に移動することを繰り返して (N, M) に到達することが出来る．同様に，(x, y) から $(x - 1, y)$ または $(x, y - 1)$ に移動することを繰り返して $(1, 1)$ に到達することが出来る．このように得られた移動をつなげると良い移動となる．

よって，新しく $R_{x,y} \leftarrow 1$ と更新する度に (x, y) に隣接する区画で新たに更新するべき場所を探せばよい．一度 $R_{x,y} = 1$ となると二度と $R_{x,y} = 0$ となることはないため，このアルゴリズムの時間計算量は $O(Q + NM)$ となる．